ufoi

Calculer la dérivée première de la fonction $y = \varphi(x)$ définie par l'équation $\sin(x-y) + \cos(x+y) = 1$. Conclure.

$$f(x,y) = \sin(x-y) + \cos(x-y) - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(x-y) + \sin(x-y)$$

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x-y) + \cos(x-y) = 1 \\ \sin(x-y) - \cos(x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x-y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{impossible.}$$

Ainsi, en tout point (x_0, y_0) de la courbe d'équation $f(x,y) = 0$ la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ n'est pas nulle. D'après le Th. Fcts. Impl., il existera un voisinage ouvert U de x_0, un voisinage ouvert V de y_0 et une application $\varphi : U \to V$ de classe C^∞ (car f l'est) telle que

$$\forall (x,y) \in U \times V \qquad f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

La dérivée de φ sera (pour $x \in U$) :

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\frac{\cos(x-y) - \sin(x-y)}{-\cos(x-y) + \sin(x-y)} = 1$$

En intégrant : $\varphi(x) = x + k$ pour tout $x \in U$. En reportant dans l'équation, on trouve que nécessairement $k = 0$. Donc :

Ccl : $\boxed{\sin(x-y) + \cos(x+y) = 1 \iff y = x}$

en tant que fonction de x

Cette conclusion est un raccourci pour : " Il existe une et une seule fonction dérivable $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sin(x - \varphi(x)) + \cos(x + \varphi(x)) = 1$. C'est la fonction $\varphi : x \mapsto x$. "

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ a) Montrer que $f(x,y) = 1$ définit une fonction implicite $x \mapsto \varphi(x)$ avec $\varphi(0) = 1$.

b) Mq que φ est C^∞ et calculer $\varphi'(x)$ en fonction de x et de $y = \varphi(x)$.

• a) Posons $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

$f(x,y) = 1 \iff g(x,y) = 0$

~~et $g(x,y) = 0$~~

On a : $g(0,1) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = +3 \neq 0$, de sorte que le Th. des fonctions implicites montre l'existence :

- d'un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}$
- d'un voisinage V de 1 dans $\mathbb{R}$
- d'une fct $\varphi : U \to V$ telle que

$\forall (x,y) \in U \times V \qquad g(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$

• b) g est C^∞, donc φ le sera aussi sur un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}$.
De plus, le Th. des Fonct. Impl. donne :

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)} \qquad \text{avec } y = \varphi(x)$$

$$= -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Exercice n°1 :

On suppose que les fonctions $(x,y) \mapsto u(x,y)$ et $(x,y) \mapsto v(x,y)$ admettent des dérivées partielles et vérifient les relations

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = x \\ 2uv = y \end{cases}$$

Calculer $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$.

1) $\begin{cases} F_1(x,y,u,v) = x - u^2 + v^2 \\ F_2(x,y,u,v) = y - 2uv \end{cases}$

Le Th. des fcts implicites mq u et v sont des fcts de (x,y) sur un voisinage de (x_0,y_0) tel que $F_1(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, ie qu'il existe φ_1, φ_2 de classe C^1 sur ce voisinage V, à valeurs dans $\mathbb{R}$, tq

$$\forall (x,y) \in V \qquad \left.\begin{array}{l} F_1(x,y,u,v)=0 \\ F_2(x,y,u,v)=0 \end{array}\right\} \iff \begin{cases} u = \varphi_1(x,y) \\ v = \varphi_2(x,y) \end{cases}$$

En effet, les hyp. du Th. des Fcts implicites s'écrivent :

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

2) Dérivons le système $\begin{cases} u^2 - v^2 = x \\ 2uv = y \end{cases}$:

$$(1) \begin{cases} 2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 1 \\ \cancel{2}\frac{\partial u}{\partial x}v + \cancel{2}u\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} \cancel{2}u\frac{\partial u}{\partial y} - \cancel{2}v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ 2\frac{\partial u}{\partial y}v + 2u\frac{\partial v}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

(ref. Gourdon Egra, Analyse t2, ex 67 p105)

(1) donne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1/2 & -v \\ 0 & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix}} = \frac{u}{2(u^2+v^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} u & 1/2 \\ v & 0 \end{vmatrix}}{u^2+v^2} = -\frac{v}{2(u^2+v^2)}$$

(2) donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -v \\ 1/2 & u \end{vmatrix}}{u^2+v^2} = \dfrac{-v}{2(u^2+v^2)} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\begin{vmatrix} u & 0 \\ v & 1/2 \end{vmatrix}}{u^2+v^2} = \dfrac{u}{2(u^2+v^2)} \end{cases}$$

<u>NB</u> : Résolvons directement.

$$\begin{cases} u^2-v^2=x \\ 2uv=y \end{cases} \iff \begin{cases} u^2-v^2=x \\ u^2(-v^2)=-\dfrac{y^2}{4} \\ u.v.y \geq 0 \end{cases}$$

$$X^2 - xX - \frac{y^2}{4} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} u^2 \\ -v^2 \end{matrix}\right\} = \frac{x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{2} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} u^2 = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2} \\[2ex] v^2 = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2} \end{cases}$$

([illegible])

$$\boxed{\begin{cases} u = \varepsilon \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} \\[3ex] v = \varepsilon(\mathrm{Sgn}\, y)\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}} \end{cases}}$$